~ CURS 8 ~

6. Energia electromagnetică și forțele exercitate în câmp electromagnetic asupra corpurilor

Se numește *energie electromagnetică* acel termen aditiv din expresia cea mai generală a energiei totale a unui sistem fizic, care depinde exclusiv de mărimile de stare specific electrice și magnetice ale sistemului. Această formă de energie este asociată câmpului electromagnetic existent în sistemul fizic considerat și se anulează odată cu dispariția acestuia.

În acord cu conceptul de câmp și de transmitere din aproape în aproape a acțiunilor sale, energia electromagnetică trebuie considerată distribuită în spațiu. Astfel, are sens introducerea noțiunii de *densitate de volum a energiei electromagnetice*:

$$w = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta v} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}v},$$

unde ΔW este energia localizată în volumul Δv, ca măsură a modului de distribuire a energiei în spațiul ocupat de câmp.

6.1. Teorema energiei electromagnetice. Teorema lui Poynting

Fie un domeniu D_Σ delimitat de suprafața închisă (Σ), în care câmpul electromagnetic se găsește în interacțiune cu un sistem dat de corpuri imobile și rigide, iar pentru simplificarea raționamentului se vor considera inițial corpurile liniare și izotrope, nepolarizate permanent, atât din punct de vedere electric, cât și magnetic.

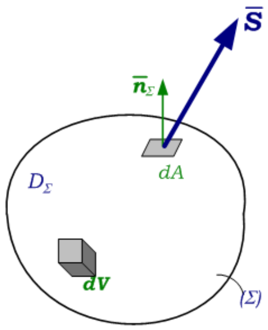

Fig. 6.1. Domeniul de calcul al energiei electromagnetice.

Vom folosi în deducție formele locale ale legii circuitului magnetic și a legii inducției electromagnetice, respectiv legile de legătură în câmp electric și câmp magnetic:

$$rot\overline{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{J}} + \frac{\partial \overline{\mathbf{D}}}{\partial t},$$

$$rot\overline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t},$$

$$\overline{\mathbf{D}} = \varepsilon \overline{\mathbf{E}} \text{ și } \overline{\mathbf{B}} = \mu \overline{\mathbf{H}}.$$

Considerând un proces elementar, în care pentru un interval de timp $\mathrm{d}t$ o anumită parte a energiei electromagnetice $\mathrm{d}W_\Sigma$ părăsește domeniul considerat prin frontiera (Σ), iar o altă parte $\mathrm{d}W_J$ este cedată conductoarelor sistemului în procesul de conducție electrică, se poate scrie următoarea ecuație de bilanț energetic:

$$-\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_\Sigma + \mathrm{d}W_J$$

sau, prin raportare la intervalul de timp elementar:

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = P_\Sigma + P_J ,$$

unde P_Σ și P_J sunt puterile corespunzătoare celor două forme de pierderi de energii considerate.

Cei doi termeni din membrul drept pot fi scriși ca fluxul prin suprafața (Σ) a unei mărimi vectoriale $\overline{\mathbf{S}}$ (denumită *vectorul Poynting*), măsură a densității de putere transmisă, respectiv ca putere cedată conductoarelor conform legii conducției electrice:

$$P_\Sigma = \oint_{(\Sigma)} \overline{\mathbf{S}} \cdot \overline{\mathbf{n}}\mathrm{d}A ,$$

$$P_J = \int_{(D_\Sigma)} \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{J}}\mathrm{d}v$$

În aceste condiții, relația energetică poate fi rescrisă sub forma:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{(D_\Sigma)} w\mathrm{d}v = \oint_{(\Sigma)} \overline{\mathbf{S}} \cdot \overline{\mathbf{n}}\mathrm{d}A + \int_{(D_\Sigma)} \overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{J}}\mathrm{d}v ,$$

În cele ce urmează se efectuează o serie de calcule și de substituiri pe baza relațiilor Maxwell obținând-se următoarea dezvoltare :

$$\int_{(D_\Sigma)} p_J\mathrm{d}v + \oint_{(\Sigma)} \left(\overline{\mathbf{E}} \times \overline{\mathbf{H}}\right) \cdot \overline{\mathbf{n}}\mathrm{d}A = -\int_{(D_\Sigma)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{D}} + \frac{1}{2}\overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{B}}\right)\mathrm{d}v$$

Comparând și identificând termen cu termen ultimele două relații se obțin următoarele expresii:

- densitatea de volum a energiei electromagnetice:

$$w = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{E}} \cdot \overline{\mathbf{D}} + \frac{1}{2}\overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{B}} ,$$

respectiv expresia vectorului Poynting:

$$\overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{E}} \times \overline{\mathbf{H}} ,$$

În mod formal, cei doi termeni din expresia densității de volum a energiei pot fi identificați separat pentru regimurile statice (singurele în care nu se condiționează reciproc) și cu ajutorul legilor de legătură în câmp electric, respectiv magnetic (pentru materiale liniare și izotrope) în:

- densitatea de volum a energiei electrice:

$$w_e = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{D}} \cdot \overline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$$

- densitatea de volum a energiei magnetice:

$$w_m = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$$

6.2. Energia câmpului electrostatic al unui sistem de conductoare încărcate

Considerăm un sistem de n conductoare imobile, încărcate cu sarcinile electrice q_k și dispuse într-un mediu dielectric, neîncărcat, fiecare conductor constituind totodată un domeniu echipotențial de valoare V_k a potențialului său electrostatic (fig. 6.2).

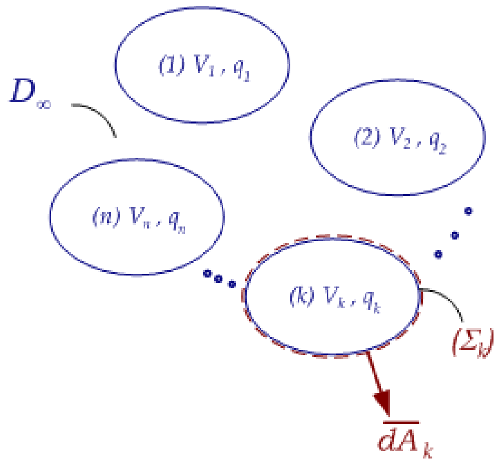

Fig. 6.2. Explicativă pentru calculul energiei electrostatice a unui sistem de conductoare încărcate.

Folosind teorema potențialului electrostatic în relația densității de volum a energiei electrice se obține:

$$w_e = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{D}} \cdot \overline{\mathbf{E}} = -\frac{1}{2}\overline{\mathbf{D}} \cdot gradV = -\frac{1}{2}div\left(V\overline{\mathbf{D}}\right) + \frac{1}{2}Vdiv\overline{\mathbf{D}}$$

Efectuând calculul pe domeniul de studiu din care excludem conductoarele (domenii de singularitate), notat cu D_∞ și observând că în acest domeniu nu este localizată sarcina electrică ($div\overline{\mathbf{D}} = 0$), rezultă:

$$W_e = -\frac{1}{2}\int_{D_\infty} div\left(V\overline{\mathbf{D}}\right)\mathrm{d}v$$

Această integrală se transformă într-o integrală pe suprafață și observând că domeniul D_∞ este limitat atât de suprafața de la infinit (Σ_∞) (având normala la suprafață pozitivă deoarece sensul ei este spre interiorul suprafețelor), cât și de suprafețele (Σ_k) (având normala la suprafață negativă deoarece sensul ei este spre exteriorul suprafețelor) ale celor n conductoare, se obține:

$$W_e = -\frac{1}{2}\oint_{\Sigma_\infty} V\overline{\mathbf{D}}\cdot\overline{\mathbf{n}}\mathrm{d}A + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Sigma_k} V\overline{\mathbf{D}}\cdot\overline{\mathbf{n}}\mathrm{d}A_k$$

Se poate observa că în punctele suprafeței (Σ_k) potențialele sunt constante V_k, iar integrala pe suprafața (Σ_∞) este nulă, deci se obține folosind legea fluxului electric:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k \oint_{\Sigma_k} \overline{\mathbf{D}}\cdot\overline{\mathbf{n}}\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k q_k\ ,$$

Enunț: Energia câmpului electrostatic al unui sistem de conductoare încărcate este egală cu semisuma produselor dintre potențialele și sarcinile conductoarelor.

Cu ajutorul acestei relații putem determina și energia înmagazinată de un condensator electric pentru care numărul conductoarelor este n = 2 (cele două armături), știind că $q_1 = q$ și $q_2 = -q$, iar potențialele sunt V_1 și V_2:

$$W_e = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2) = \frac{1}{2}(qV_1 - qV_2) = \frac{1}{2}q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}qU\ ,$$

Pe baza relației de definiție a capacității electrice se mai poate dezvolta:

$$W_e = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C},$$

6.3. Energia câmpului magnetic cvasistaționar al unui sistem de conductoare filiforme în stare electrocinetică

Pentru calculul energiei în câmp magnetic se va considera un sistem de n conductoare filiforme parcurse de câte un curent electric de conducție de intensitate i_k, plasate într-un mediu magnetic infinit extins (fig. 6.3). Exprimând inducția magnetică în funcție de potențialul magnetic vector, se obține următoarea dezvoltare:

$$w_m = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{H}}\cdot rot\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}div(\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{H}}) + \frac{1}{2}\overline{\mathbf{A}}rot\overline{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}div(\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{H}}) + \frac{1}{2}\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{J}},$$

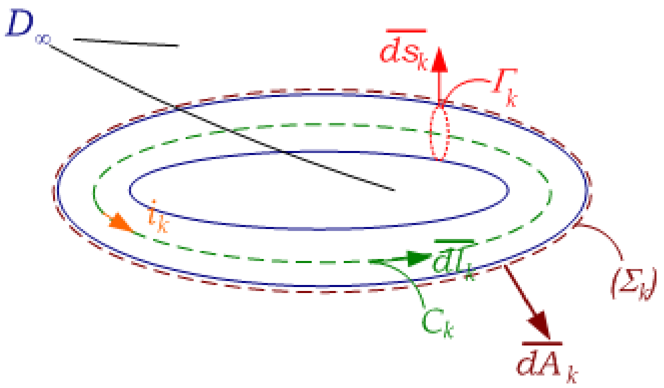

Fig. 6.3. Explicativă pentru calculul energiei magnetice a unui sistem de conductoare filiforme parcurse de curenți.

Integrând această relație pe întreg spațiul, dar eliminând domeniile de discontinuitate ale câmpului (ocupate de conductoare) se obține energia totală a câmpului. De asemenea, ținând cont de faptul că domeniul infinit e mărginit de suprafața la infinit (Σ_∞), dar și de suprafețele celor n conductoare (Σ_k), iar în acest domeniu nu există curent de conducție ($\bar{\mathbf{J}} = 0$), energia totală a câmpului este:

$$W_m = \int_{D_\infty} w_m \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{D_\infty} div\left(\overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{H}}\right)\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\oint_{\Sigma_\infty}\left(\overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{H}}\right)\cdot \overline{\mathbf{n}}\mathrm{d}A - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Sigma_k}\left(\overline{\mathbf{A}} \times \overline{\mathbf{H}}\right)\cdot \overline{\mathbf{n}}\mathrm{d}A_k\ ,$$

păstrând aceeași discuție privind schimbarea semnului celui de al doilea termen. De asemenea, în mod asemănător calculului din câmp electric, primul termen este nul. Pe de altă parte, elementul de arie poate fi exprimat în funcție de elementul orientat de arc al curbei medii (C_k) a conductorului și de elementul orientat de arc de curbă închisă (Γ_k) ce delimitează o secțiune normală oarecare a conductorului:

$$\overline{\mathbf{n}}\mathrm{d}A_k = \mathrm{d}\overline{\mathbf{A}}_k = \overline{\mathbf{dl}}_k \times \overline{\mathbf{ds}}_k,\ \text{cu}\ \overline{\mathbf{dl}}_k \perp \overline{\mathbf{ds}}_k, \overline{\mathbf{H}} \perp \overline{\mathbf{dl}}_k,\ \overline{\mathbf{H}} \,//\, \overline{\mathbf{ds}}_k$$

În aceste condiții, expresia energiei magnetice, folosind teorema lui Ampére și exprimarea fluxului magnetic în funcție de potențialul magnetic vector devine:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Sigma_k}\left(\overline{\mathbf{A}}\times\overline{\mathbf{H}}\right)\cdot\left(\overline{\mathbf{dl}}_k \times \overline{\mathbf{ds}}_k\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Sigma_k}[\left(\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{ds}}_k\right)\cdot\left(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{dl}}_k\right) -$$
$$-\left(\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{ds}}_k\right)\cdot\left(\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{dl}}_k\right)] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Gamma_k}\overline{\mathbf{H}}\cdot\overline{\mathbf{ds}}_k\int_{C_k}\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{dl}}_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k\varphi_k .$$

Enunț: Energia câmpului magnetic cvasistaționar al unui sistem de conductoare filiforme parcurse de curenți este egală cu semisuma produselor dintre intensitățile curenților și fluxurile magnetice ce înlănțuie conductoarele respective.

Energia câmpului magnetic al unei bobine (n = 1), exprimată apoi și în raport cu relația de definiție a inductivității, se poate scrie:

$$W_m = \frac{1}{2}i\varphi = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{L}.$$

Pentru două bobine cuplate magnetic (n = 2), expresia energiei câmpului magnetic are trei termeni – primul și ultimul reprezentând *energia proprie bobinelor*, al doilea constituind *energia de interacțiune* dintre ele:

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + L_{12}i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 .$$

6.4. Teoremele forțelor generalizate în câmp electrostatic

Se consideră un sistem de n conductoare încărcate cu sarcinile q_k și având potențialele V_k, situate într-un mediu dielectric, neîncărcat și infinit extins. Poziția relativă a acestor conductoare poate fi descrisă prin intermediul a p coordonate generalizate, x_1, x_2, ..., x_p, reprezentate de gradele de libertate ale sistemului (distanțe, unghiuri, suprafețe). Vom considera în acest caz *forța generalizată*, X_k, capabilă să modifice numai una dintre aceste coordonate, lăsându-le pe celelalte nemodificate, ce poate fi interpretată ca o forță newtoniană, moment (cuplu) sau tensiune superficială, în funcție de tipul coordonatei generalizate.

Lucrul mecanic asociat acestor forțe generalizate la modificări independente elementare are valoarea:

$$\mathrm{d}L = \sum_{k=1}^{p} X_\mathrm{k} \mathrm{d}x_\mathrm{k} \,.$$

Dacă transformările elementare sunt efectuate în regim electrostatic, energia elementară primită de sistem de la sursele exterioare este:

$$\mathrm{d}W_\mathrm{ext} = \sum_{k=1}^{n} V_k \mathrm{d}q_k$$

și este egală cu suma dintre lucrul mecanic elementar efectuat de sistem și creșterea elementară a energiei electrostatice a sistemelor:

$$\mathrm{d}W_\mathrm{ext} = \mathrm{d}L + \mathrm{d}W_\mathrm{e}$$

Calculul forțelor generalizate se poate face în două ipoteze:

A. Sistemul este izolat: $q_k = \text{const.} \Rightarrow \mathrm{d}q_k = 0$

În aceste condiții, relația de bilanț energetic capătă forma:

$$\mathrm{d}L + \mathrm{d}W_\mathrm{e} = 0 \Rightarrow \mathrm{d}L = -(\mathrm{d}W_\mathrm{e})_{q_k = ct.} \,,$$

adică lucrul mecanic se efectuează pe baza scăderii energiei electrostatice interne a sistemului.

Exprimând energia electrostatică în funcție numai de sarcinile electrice și de coordonatele generalizate $W_e = W_e(q_1, \ldots, q_n, x_1, \ldots, x_\mathrm{p})$, se obține (pentru fiecare coordonată generalizată):

$$(\mathrm{d}W_\mathrm{e})_{q_k = ct.} = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x_j.$$

Din ultimele două relații se obține relația de calcul al forței generalizate:

$$X_j = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x_j} \right|_{q = ct.} \,, \qquad j = \overline{1, \mathrm{p}}$$

Enunț: Forța generalizată X_j asociată coordonatei generalizate x_j este egală cu derivata parțială cu semn schimbat a energiei electrostatice a sistemului (exprimată în funcție numai de sarcinile electrice și de coordonatele generalizate), în raport cu coordonata generalizată x_j, la sarcini constante ale conductoarelor.

B. Sistemul are potențialele fixate: $V_k = \text{const.} \Rightarrow \mathrm{d}V_k = 0$

În acest caz, este necesar calculul energiei electrice pe baza relației din capitolul anterior:

$$\mathrm{d}W_\mathrm{e} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} V_k q_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} V_k \mathrm{d}q_k \,,$$

pe care o vom înlocui în relația de bilanț energetic:

$$\sum_{k=1}^{n} V_k \mathrm{d}q_k = \mathrm{d}L + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k \mathrm{d}q_k \Rightarrow \mathrm{d}L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k \mathrm{d}q_k = \left(\mathrm{d}W_\mathrm{e}\right)_{V_k=ct.},$$

adică energia primită de sistem de la sursele exterioare se distribuie în mod egal pentru efectuarea de lucru mecanic și pentru creșterea energiei electrostatice a sistemului.

Exprimând energia electrostatică în funcție numai de potențialele electrice și de coordonatele generalizate $W_e = W_e\left(V_1,\ldots,V_n, x_1,\ldots,x_p\right)$, se obține (pentru fiecare coordonată generalizată):

$$\left(\mathrm{d}W_\mathrm{e}\right)_{V_k=ct.} = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_j .$$

Din ultimele două relații se obține relația de calcul al forței generalizate:

$$X_j = \left.\frac{\partial W_e}{\partial x_j}\right|_{V=ct.}, \qquad j = \overline{1,\mathrm{p}}$$

Enunț: Forța generalizată X_j asociată coordonatei generalizate x_j este egală cu derivata parțială a energiei electrostatice a sistemului (exprimată în funcție numai de potențialele electrice și de coordonatele generalizate), în raport cu coordonata generalizată x_j, la potențiale constante ale conductoarelor.

6.5. Teoremele forțelor generalizate în câmp magnetic

Se consideră un sistem de n conductoare parcurse de curenții de conducție i_k, dispuse într-un mediu magnetic neparcurs de curenți și infinit extins. Poziția lor reciprocă este determinată de p coordonate generalizate și sunt caracterizare de o rezistență R_k și o sursă de t.e.m imprimată e_k.

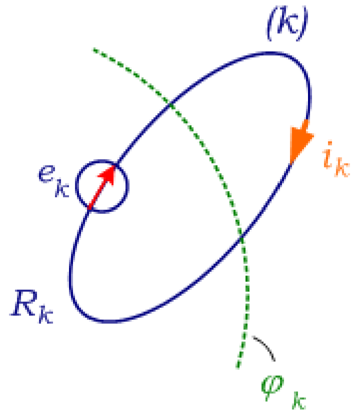

Fig. 6.4. Explicativă pentru teoremele forțelor generalizate în câmp magnetic.

Energia magnetică a sistemului poate fi calculată pe baza principiului conservării energiei, conform căruia energia primită de la surse trebuie să acopere pierderile prin efect Joule în rezistențele circuitului, lucrul mecanic al forțelor generalizate și creșterea energiei magnetice a sistemului.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k i_k dt = \sum_{k=1}^{n} R_k i_k^2 dt + \mathrm{d}L + \mathrm{d}W_m$$

Dacă aplicăm legea conducției electrice pentru un circuit *k*, obținem:

$$e_\mathrm{k} = R_\mathrm{k} i_\mathrm{k} + \frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}t},$$

Înmulțind această ultimă relație cu $i_\mathrm{k}\mathrm{d}t$ și însumând termenii după *n*, se obține:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k i_k dt = \sum_{k=1}^{n} R_k i_k^2 dt + \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} i_k \mathrm{d}\Phi_k$$

Identificând termen cu termen relațiile (9.43) și (9.45), se găsește:

$$\mathrm{d}L + \mathrm{d}W_m = \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} i_k \mathrm{d}\Phi_k$$

Calculul forței generalizate X_j, asociată coordonatei generalizate x_j (acționând pe direcția de creștere a lui x_j) se poate face în două ipoteze:

A. Fluxurile magnetice sunt considerate constante: $\Phi_k = \mathrm{const.} \Rightarrow \mathrm{d}\Phi_k = 0$

În aceste condiții, relația anterioară capătă forma:

$$\mathrm{d}L = -(\mathrm{d}W_\mathrm{m})_{\Phi_k = ct.},$$

adică lucrul mecanic se efectuează pe baza scăderii energiei magnetice a sistemului.

Exprimând energia magnetică în funcție numai de fluxurile magnetice și de coordonatele generalizate $W_m = W_m(\Phi_1, \ldots, \Phi_n, x_1, \ldots, x_p)$,se obține (pentru fiecare coordonată generalizată):

$$(\mathrm{d}W_\mathrm{m})_{\Phi_k = ct.} = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\partial W_m}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x_j.$$

Din ultimele două relații se obține relația de calcul al forței generalizate:

$$X_j = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial x_j}\right|_{\Phi = ct.}, \quad j = \overline{1, p}$$

Enunț: Forța generalizată X_j asociată coordonatei generalizate x_j este egală cu derivata parțială cu semn schimbat a energiei magnetice a sistemului (exprimată în funcție numai de fluxurile magnetice și de coordonatele generalizate), în raport cu coordonata generalizată x_j, la fluxuri magnetice constante.

B. Curenții circuitelor sunt considerați constanți: $i_k = \text{const.} \Rightarrow \mathrm{d}i_k = 0$

În acest caz, e nevoie de calculul energiei magnetice pe baza relației din capitolul anterior:

$$\mathrm{d}W_\mathrm{m} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k \Phi_k\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\Phi_k \,,$$

pe care o vom înlocui în relația de bilanț energetic:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\Phi_k = \mathrm{d}L + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\Phi_k \Rightarrow \mathrm{d}L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k \mathrm{d}\Phi_k = \left(\mathrm{d}W_\mathrm{m}\right)_{i_k = ct.},$$

adică energia primită de sistem de la sursele exterioare se distribuie în mod egal pentru efectuarea de lucru mecanic și pentru creșterea energiei magnetice a sistemului.

Exprimând energia magnetică în funcție numai de curenții circuitelor electrice și de coordonatele generalizate $W_m = W_m\left(i_1,\ldots,i_n, x_1,\ldots,x_\mathrm{p}\right)$, se obține (pentru fiecare coordonată generalizată):

$$\left(\mathrm{d}W_\mathrm{m}\right)_{i_k = ct.} = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\partial W_m}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_j \,.$$

Din ultimele două relații se obține relația de calcul al forței generalizate:

$$X_j = \left.\frac{\partial W_m}{\partial x_j}\right|_{i = ct.}$$

Enunț: Forța generalizată X_j asociată coordonatei generalizate x_j este egală cu derivata parțială a energiei magnetice a sistemului (exprimată în funcție numai de curenții circuitelor electrice și coordonatele generalizate), în raport cu coordonata generalizată x_j, la curenți electrici constanți.